25/02/2019

Έστω E: $\mathbb{K}$-διανυσματικός χώρος, $\beta = \{\vec{e_1}, \vec{e_2}, \dots, \vec{e_n}\}$ βάση του E. Αν $f: E \to E$ είναι μια γραμμική απεικόνιση, τότε από τώρα και στο εξής τη f θα την λέμε ενδομορφισμό του E.

$f(\vec{e_1}) = a_{11}\vec{e_1} + \dots + a_{n1}\vec{e_n}$

$\vdots$

$f(\vec{e_n}) = a_{1n}\vec{e_1} + \dots + a_{nn}\vec{e_n}$

Τότε $M_{\beta}^{\beta}(f) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} = A$

είναι ο πίνακας της f στη βάση β.

Αν $e = \{\vec{\varepsilon_1}, \vec{\varepsilon_2}, \dots, \vec{\varepsilon_n}\}$ βάση του E και $B = M_e^e(f)$ είναι ο

πίνακας του f στην βάση $\mathcal{C}$. Τότε οι πίνακες A και B είναι όμοιοι $\Rightarrow$ υπάρχει αντιστρέψιμος πίνακας $P: P^{-1}AP = B$ και τότε:
$P = M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}$ πίνακας μετάβασης από τη βάση $\mathcal{B}$ στην βάση $\mathcal{C}$

→ Έστω $A \in M_n(\mathbb{K})$. Ο πίνακας A ορίζει μια γραμμική απεικόνιση δηλαδή έναν ενδομορφισμό του $\mathbb{K}^n = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} / x_i \in \mathbb{K},\ 1 \le i \le n \right\} =$
$= M_{n \times 1}(\mathbb{K})$
$f_A : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n \quad f_A(X) = A \cdot X$
Αν $\mathcal{B} = \left\{ E_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, E_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \ldots, E_n = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ είναι η κανονική βάση του $\mathbb{K}^n$, τότε $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f_A) = A$

Πολυώνυμα

Έστω $\mathbb{K}$: σώμα και $\mathbb{K}[t]$ ο $\mathbb{K}$-διανυσματικός χώρος των πολυωνύμων με στοιχεία από το $\mathbb{K}$. Αν $P(t) \in \mathbb{K}[t]$, τότε:
$P(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \ldots + a_k t^k$, όπου $a_i \in \mathbb{K}$, $0 \le i \le k$.

Αν $Q(t) = b_0 + b_1 t + b_2 t^2 + \ldots + b_\lambda t^\lambda \in \mathbb{K}[t]$, τότε:
$P(t) = Q(t) \Leftrightarrow a_i = b_i \ \forall i \ge 0$

Ορισμός: Το πολυώνυμο $P(t)$ καλείται μηδενικό $\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow P(t) = a_0 + a_1 t + \ldots + a_k t^k$, όπου $a_0 = a_1 = \ldots = a_k = 0$ και τότε θα γράφουμε $P(t) = 0$
Αν $P(t) = a_0 + a_1 t + \ldots + a_k t^k \in \mathbb{K}[t]$
Αν $P(t) = 0$, τότε το $P(t)$ δεν έχει βαθμό
Αν $P(t) \neq 0$ τότε ο βαθμός του ορίζεται να είναι:
$$\deg P(t) = \max\{ i \in \mathbb{N} \cup \{0\} / a_i \neq 0 \}$$
- $\deg P(t) = 0 \Leftrightarrow P(t) \neq 0$ και $P(t) = a_0 \in \mathbb{K}$

Ιδιότητες: ① Αν $P(t), Q(t)$ είναι μη μηδενικά πολυώνυμα, τότε αν $P(t)+Q(t) \neq 0$ θα έχουμε ότι:

$$\deg(P(t)+Q(t)) \leq \max\{\deg P(t), \deg Q(t)\}$$

② Αν $P(t), Q(t)$ δύο μη μηδενικά πολυώνυμα τότε $P(t)\cdot Q(t) \neq 0$ και $\deg(P(t)\cdot Q(t)) = \deg P(t) + \deg Q(t)$

→ Αν $P(t) = a_0 + a_1 t + \dots + a_\kappa t^\kappa$ και $Q(t) = b_0 + b_1 t + \dots + b_\lambda t^\lambda$ ανήκουν στο $\mathbb{K}[t]$, τότε:

- $P(t) + Q(t) = (a_0+b_0) + (a_1+b_1)t + \dots + (a_\mu+b_\mu)t^\mu$ όπου $\mu = \max\{\kappa, \lambda\}$
- $P(t)\cdot Q(t) = \gamma_0 + \gamma_1 t + \gamma_2 t^2 + \dots + \gamma_\rho t^\rho$ όπου $\rho = \kappa+\lambda$ και $\gamma_\mu = a_0 b_\mu + a_1 b_{\mu-1} + a_2 b_{\mu-2} + \dots + a_\mu b_0$

Διαιρετότητα

Αν $P(t), Q(t) \in \mathbb{K}[t]$, τότε: το $P(t)$ διαιρεί το $Q(t)$ και θα γράφουμε $P(t) \mid Q(t) \iff \exists A(t) \in \mathbb{K}[t] : Q(t) = P(t)\cdot A(t)$

Ιδιότητες: ① $P(t) \mid 0$

② $P(t) \mid Q(t)$ και $Q(t) \mid R(t) \Rightarrow P(t) \mid R(t)$

③ $P(t) \mid Q_1(t)$ και $P(t) \mid Q_2(t) \Rightarrow P(t) \mid Q_1(t) - Q_2(t)$

④ $\left.\begin{array}{l} P_1(t) \mid Q_1(t) \\ P_2(t) \mid Q_2(t) \end{array}\right| \Rightarrow P_1(t)\cdot P_2(t) \mid Q_1(t)\cdot Q_2(t)$

(5) $P(t) / Q(t)$ με $Q(t) \neq 0$ $\Rightarrow \deg P(t) \leq \deg Q(t)$

Πρόταση: Αν $P(t) \neq 0$, $Q(t) \neq 0$ και ισχύει ότι $P(t) / Q(t)$ και $Q(t) / P(t)$ τότε υπάρχει $\lambda \in K$, $\lambda \neq 0$: $P(t) = \lambda \cdot Q(t)$

Απόδειξη:

$$\left.\begin{array}{l} P(t) / Q(t) \\ Q(t) / P(t) \end{array}\right\} \overset{(5)}{\Rightarrow} \begin{array}{l} \deg P(t) \leq \deg Q(t) \\ \deg Q(t) \leq \deg P(t) \end{array} \Rightarrow$$

$\Rightarrow \deg P(t) = \deg Q(t)$

$Q(t) / P(t) \Rightarrow P(t) = Q(t) \cdot A(t) \Rightarrow \deg P(t) = \deg Q(t) + \deg A(t) \Rightarrow$

$\Rightarrow \deg A(t) = 0 \Rightarrow A(t)$ σταθερό μη μηδενικό πολυώνυμο και άρα $A(t) = \lambda \in K$, $\lambda \neq 0$. Τότε $P(t) = \lambda Q(t)$

Ορισμός: Ένα πολυώνυμο $P(t)$ καλείται κανονικό $\Leftrightarrow P(t) \neq 0$ και ο συντελεστής της μεγιστοβάθμιας δύναμης του t είναι μονάδα $\Leftrightarrow P(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \ldots + a_{k-1} t^{k-1} + a_k t^k$

Πόρισμα: Αν $P(t), Q(t)$ είναι κανονικά πολυώνυμα, τότε:

$$\left.\begin{array}{l} P(t) / Q(t) \\ Q(t) / P(t) \end{array}\right\} \Rightarrow P(t) = Q(t)$$

Ευκλείδεια Διαίρεση: Αν $A(t), B(t) \in K[t]$, όπου $B(t) \neq 0$, τότε υπάρχει μοναδικό ζεύγος πολυωνύμων $Q(t), R(t)$ έτσι ώστε: $A(t) = B(t) Q(t) + R(t)$ όπου είτε $R(t) = 0$ είτε $\deg R(t) < \deg B(t)$

Το πολυώνυμο $Q(t)$ καλείται πηλίκο της διαίρεσης του $A(t)$ με το $B(t)$.

Το πολυώνυμο $R(t)$ καλείται υπόλοιπο της διαίρεσης του $A(t)$ με το $B(t)$

Ορισμός: Αν $P(t) \in \mathbb{K}[t]$ και αν $P(t) = a_0 + a_1 t + \dots + a_n t^n$, τότε το $p \in \mathbb{K}$ καλείται ρίζα του $P(t) \Leftrightarrow P(p) = 0$ δηλαδή $a_0 + a_1 p + a_2 p^2 + \dots + a_n p^n = 0$

Ιδιότητες: ① p: ρίζα του $P(t) \Leftrightarrow t - p \,/\, P(t)$

② Αν $p_1, p_2, \dots, p_k$ είναι ανα δύο διαφορετικές ρίζες του $P(t)$, τότε: $(t-p_1)(t-p_2)\dots(t-p_k) \,/\, P(t)$ και αντιστρόφως

Ορισμός: Αν $p \in \mathbb{K}$, τότε το p καλείται ρίζα του $P(t)$ πολλαπλότητας $k \geq 1 \Leftrightarrow (t-p)^k \,/\, P(t)$ αλλά $(t-p)^{k+1} \not/\, P(t) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow P(t) = (t-p)^k \cdot Q(t)$, όπου $Q(p) \neq 0$

- Αν $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ τότε p: ρίζα πολλαπλότητας $k \geq 1 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow P(p) = P'(p) = P''(p) = \dots = P^{(k-1)}(p) = 0$ αλλά $P^{k}(p)' \neq 0$
- Το πλήθος των ριζών ενός πολυωνύμου βαθμού n είναι $\leq n$
- Γενικά ένα πολυώνυμο μπορεί να μην έχει καμία ρίζα στο $\mathbb{K}$.

Θεμελιώδες Θεώρημα της Άλγεβρας: Κάθε πολυώνυμο βαθμού μεγαλύτερου ή ίσου της μονάδας με συντελεστές από το $\mathbb{C}$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο $\mathbb{C}$. Επιπλέον αν $P(t) \in \mathbb{C}[t]$, $\deg P(t) \geq 1$, τότε:

$P(t) = a(t-p_1)^{k_1} \cdot (t-p_2)^{k_2} \cdot \dots \cdot (t-p_\mu)^{k_\mu}$, όπου $a \in \mathbb{C}$, $k_i \in \mathbb{N}$, $1 \leq i \leq \mu$ και $\deg P(t) = k_1 + k_2 + \dots + k_\mu$

$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$ $\in M_2(\mathbb{C})$ χαρακτηριστικό πολυώνυμο $t^2 + 1$

<u>Ιδιοτιμές</u>

Έστω E: $\mathbb{K}$-διανυσματικός χώρος και έστω $f: E \to E$ ένας ενδομορφισμός του E.

<u>Ορισμός</u>: Το στοιχείο $\lambda \in \mathbb{K}$ καλείται ιδιοτιμή της $f \iff \exists \vec{x} \in E : \vec{x} \neq \vec{0} : f(\vec{x}) = \lambda \vec{x}$ και τότε το $\vec{x}$ καλείται ιδιοδιάνυσμα της f που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή λ.